Probeklau07/08

zu Aufgabe 3

1. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

   Das Nullpolynom liegt in U, denn es ist von der Form $2a + 3b + bT + aT^2$, mit $a = b = 0$.

   Seien $2a+3b+bT+aT^2$ und $2a'+3b'+b'T+a'T^2$ in U. Dann gilt $(2a+3b+bT+aT^2)+(2a'+3b'+b'T+a'T^2) = 2(a+a')+3(b+b')+(b+b')T+(a+a')T^2 \in U$.

   Sei $2a + 3b + bT + aT^2 \in U$, und sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt $r(2a + 3b + bT + aT^2) = 2ra + 3rb + rbT + raT^2 \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist.

2. Die Polynome $2+T^2$ und $3+T$ liegen in U. Wir zeigen, dass $(2+T^2, 3+T)$ eine Basis von U ist.

   Erzeugendensystem: Sei $2a + 3b + bT + aT^2 \in U$. Dann gilt

   $$2a + 3b + bT + aT^2 = a(2 + T^2) + b(3 + T),$$

   und es folgt, dass $(2 + T^2, 3 + T)$ ein Erzeugendensystem von U ist.

Lineare Unabhängigkeit: Die beiden Polynome $2 + T^2$ und $3 + T$ sind keine Vielfachen voneinander. Es folgt, dass sie linear unabhängig sind.

Da die Polynome in U liegen, ein Erzeugendensystem von U bilden und linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U.

WS 07/08

zu Aufgabe 3

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Nullmatrix liegt in V. Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $A + B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix} \in V$. Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $(rA) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rb & rc \end{pmatrix}$, also $rA \in V$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass V ein Unterraum von $M_{22}(\mathbb{R})$ ist.

Nachklausur 07/08

zu Aufgabe 3

1. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium. Mit $a = b = 0$ liegt das Nullpolynom in U. Seien $a, a', b, b', s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (a + bT + aT^2 + (a+b)T^3) + (a' + b'T + a'T^2 + (a' + b')T^3) \\ = \; & (a + a') + (b + b')T + (a + a')T^2 + (a + a' + b + b')T^3 \in U \end{aligned}$$

und

$$s(a + bT + aT^2 + (a+b)T^3) = sa + sbT + saT^2 + (sa + sb)T^3 \in U.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von V ist.

2. Mit $a = 1$ und $b = 0$ gilt $1 + T^2 + T^3 \in U$, und mit $a = 0$ und $b = 1$ gilt $T + T^3 \in U$. Diese Polynome sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander. Wir zeigen nun, dass sie auch ein Erzeugendensystem von U bilden. Dazu sei $a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 \in U$. Dann gilt $a + bT + aT^2 + (a+b)T^3 = a(1 + T^2 + T^3) + b(T + T^3)$, somit ist jedes Polynom in U eine Linearkombination der Polynome $1 + T^2 + T^3$ und $T + T^3$. Es folgt, dass $1 + T^2 + T^3, T + T^3$ eine Basis von U ist.

SS 09

Aufgabe 4

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium.

Die Nullmatrix liegt in V, denn $0X_0 = 0$.

Seien $A, B \in V$. Dann gilt $(A + B)X_0 = AX_0 + BX_0 = 0 + 0 = 0$, also $A + B \in V$.

Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $A \in V$. Dann gilt $aAX_0 = a0 = 0$, also $aA \in V$.

Mit dem Unterraumkriterium folgt die Behauptung.

WS 10/11

Aufgabe 3

1. Wir verwenden zum Beweis das Unterraumkriterium. Die $n \times n$-Nullmatrix liegt in V_n, denn die Summe der Diagonaleinträge ist 0. Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ in

V_n. Dann gilt $\mathrm{Spur}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B) = 0 + 0 = 0$, also gilt $A + B \in V_n$. Sei $a \in \mathbb{K}$ und $A = (a_{ij}) \in V_n$. Dann gilt $\mathrm{Spur}(aA) = \sum_{i=1}^{n} aa_{ii} = a \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a\mathrm{Spur}(A) = a \cdot 0 = 0$. Es folgt $aA \in V_n$. Mit dem Unterraumkriterium ist V_n ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

2. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Matrizen A, B und C liegen in V_2. Wir zeigen, dass (A, B, C) eine Basis von V_2 ist. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit

$$aA + bB + cC = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $a = b = c = 0$, und somit sind A, B und C linear unabhängig.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V_2$. Dann gilt $\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} = 0$, also $a_{22} = -a_{11}$. Es folgt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}C + a_{12}A + a_{21}B.$$

Somit ist (A, B, C) auch ein Erzeugendensystem von V_2, und es folgt, dass (A, B, C) eine Basis von V_2 ist.

SS 11

Aufgabe 3

Sei $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$. Dann ist U als Lösungsmenge des honogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit $A = (1111)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform und hat den Rang 1. Deshalb gilt $\dim(U) = 4 - 1 = 3$. Für die Vektoren der Standardbasis gilt jeweils $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, daher liegen sie nicht in U.

SS 12

Aufgabe 3

Um zu zeigen, dass U ein Unterraum von $C[a,b]$ ist, benutzen wir das Unterraumkriterium. Für $\hat{0}$, das Nullelement von $C[a,b]$, gilt $\int_a^b \hat{0}dx = 0$, also gilt $\hat{0} \in U$. Seien weiter $f,g \in U$, also $\int_a^b f(x)dx = 0 = \int_a^b g(x)dx$. Dann ist $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = 0+0 = 0$. Also folgt $f+g \in U$. Sei nun $f \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda f \in U$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $C[a,b]$ ist.

SS 16

Aufgabe 2

(a) Die Menge U_1 ist kein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$. Es sind nämlich zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in U_1$, aber

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \notin U_1.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_1 kein Unterraum sein kann.

(b) U_2 ist ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$, was wir mit dem Unterraumkriterium zeigen

(c) U_3 ist kein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$, denn $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U_3$.

und

$$s\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa & 0 \\ -sa & 0 \end{pmatrix} \in U_2.$$

Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_2 ein Unterraum ist.

Aufgabe 3

(a) Wir zeigen mit dem Unterraumkriterium, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Wegen $f(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gilt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in U_f$. Seien nun $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \in U_f$. Dann gilt $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$ und

$$f(\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b+d\\a+c\end{pmatrix}.$$

Also gilt $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \in U_f$. Sei nun noch $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in U_f$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f(\lambda \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \lambda f(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \lambda \begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda b\\\lambda a\end{pmatrix}.$$

Also gilt auch $\lambda \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in U_f$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Da U_f und $\mathrm{Kern}(f)$ Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind, gilt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in U_f$ und $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f)$, also auch $\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\} \subseteq U_f \cap \mathrm{Kern}(f)$.

Sei nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f \cap \text{Kern}(f)$. Dann gilt

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Kern}(f)$, und

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also auch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit insgesamt $U_f \cap \text{Kern}(f) \subseteq \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.